



## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

„ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ - 14.02.2026

Clasa a X – a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

## BAREME DE CORECTARE ȘI NOTARE

**Problema 1** (20 de puncte)Fie numărul  $a = \sqrt[3]{5 + \sqrt{17}} + \sqrt[3]{5 - \sqrt{17}}$ .

- a) Demonstrați că  $\sqrt[3]{5 + \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{5 - \sqrt{17}} \in \mathbb{N}$ .
- b) Arătați că  $a^3 - 6a - 10 = 0$ .
- c) Calculați  $\left[ \lg(a^2 - 6) - \lg\left(\frac{10}{a} + 6\right) - \lg\frac{1}{a^3} \right]^{-2026}$ .

**Soluție:**

- a)  $\sqrt[3]{5 + \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{5 - \sqrt{17}} = \sqrt[3]{(5 + \sqrt{17}) \cdot (5 - \sqrt{17})} = \sqrt[3]{8} = 2 \in \mathbb{N}$ . 4p
- b) Se calculează  $a^3$  și se obține  $a^3 = 10 + 6a$  5p  
 Deci,  $a^3 - 6a - 10 = 0$ . 1p
- c)  $a^3 - 6a - 10 = 0 \Rightarrow a(a^2 - 6) = 10, a \neq 0 \Rightarrow a^2 - 6 = \frac{10}{a} > 0$  2p  
 $a^3 - 6a - 10 = 0 \Rightarrow 10 + 6a = a^3$  2p  
 $\left[ \lg(a^2 - 6) - \lg\left(\frac{10}{a} + 6\right) - \lg\frac{1}{a^3} \right]^{-2026} = \left[ \lg\left(\frac{10}{a}\right) - \lg\left(\frac{10+6a}{a}\right) - \lg\frac{1}{a^3} \right]^{-2026} =$  4p  
 $= \left[ \lg\left(\frac{10}{a}\right) - \lg\left(\frac{a^3}{a}\right) - \lg\frac{1}{a^3} \right]^{-2026} = [\lg 10]^{-2026} = 1.$  2p

**Problema 2** (20 de puncte)

- a) Demonstrați că:
- $$2 \cdot \sqrt[3]{a(2a-8)} + 3 \cdot \sqrt[3]{b(2b-27)} + 5 \cdot \sqrt[3]{c(2c-125)} \leq a + b + c, (\forall) a, b, c \in \mathbb{R}.$$
- b) Folosind, eventual, inegalitatea mediilor, să se demonstreze că:
- $$\frac{1}{\log_{a_1} a_2} + \frac{1}{\log_{a_2} a_3} + \dots + \frac{1}{\log_{a_{2026}} a_1} \geq 2026, (\forall) a_1, a_2, \dots, a_{2026} > 1.$$

**Soluție:**

- a) Introducerea factorilor sub radicali 3p  
 Utilizarea inegalității mediilor pentru fiecare radical 3p  
 Finalizare. 4p
- b) Scrierea inegalității mediilor pentru  $n$  numnere 3p  
 Aplicarea inegalității mediilor pentru rapoartele date 3p  
 Folosirea proprietăților logaritmilor 2p  
 Finalizare. 2p

**Problema 3** (20 de puncte)

(i) Fie  $z \in \mathbb{C}$  o soluție a ecuației  $z^2 - z + 1 = 0$ .

a) Arătați că  $z + \frac{1}{z} = 1$ .

b) Calculați  $(z^{12} - 7z^6 + 6)^{2026}$ .

(ii) Demonstrați că pentru orice  $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$  cu proprietatea  $\frac{z^2+z+1}{z^2-z+1} \in \mathbb{R}$  are loc  $|z| = 1$ .

**Soluție:**

(i)

a)  $z^2 - z + 1 = 0, z \neq 0 \Rightarrow z - 1 + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow z + \frac{1}{z} = 1$  6p

b)  $z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow (z + 1) \Rightarrow z^3 + 1 = 0 \Rightarrow z^3 = -1$  2p

$z^{12} = 1$  și  $z^6 = 1$  4p

$(z^{12} - 7z^6 + 6)^{2026} = 0$ . 2p

(ii)  $\frac{z^2+z+1}{z^2-z+1} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{z^2+z+1}{z^2-z+1} = \overline{\left(\frac{z^2+z+1}{z^2-z+1}\right)}$  1p

Efectuarea calculelor și  $2(z - \bar{z})(1 - z\bar{z}) = 0$  3p

$z \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \Rightarrow z \neq \bar{z} \Rightarrow z - \bar{z} \neq 0$  1p

$1 - z\bar{z} = 0 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow |z| = 1$  1p

**Problema 4** (30 de puncte)

Într-un laborator, evoluția unei populații de microorganisme este modelată de funcția:

$f: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty), f(t) = 300 \cdot 3^t$ , unde  $t$  reprezintă timpul, exprimat în ore.

a) Determinați evoluția creșterii populației din oră în oră, timp de trei ore, știind că la momentul  $t = 0$  erau 300 de microorganisme.

b) Precizați monotonia funcției care modelează evoluția populației și explicați motivul.

c) Determinați momentul de timp  $t$  la care populația ajunge la valoarea  $729 \cdot 10^2$  și justificați de ce acest moment poate fi determinat.

**Soluție:**

a)  $f(0) = 300$  1p

$f(1) = 900, f(2) = 2700, f(3) = 8100$ . 9p

b) Precizarea faptului că funcția este monoton crescătoare 3p

Deoarece baza este supraunitară iar înmulțirea cu 300 nu schimbă monotonia. 2p

c)  $f(t) = 729 \cdot 10^2 \Rightarrow t = 5$  (ore) 10p

Funcția  $f$  este bijectivă de aceea există un singur timp  $t$  corespunzător populației date. 5p